Hem intentat, en la primera conferència, posar de relleu el punt de vista on s'havien situat els analistes en llurs estudis sobre les equacions diferencials fins al 1879, és a dir, el problema de representació local de la funció definida per l'equació diferencial; representació purament formal amb Newton, convergent i rigorosa amb Cauchy. Però, quant al passatge d'aquest coneixement local al coneixement general, només la teoria de funcions havia permès realitzar-lo en alguns casos.

D'aquesta evolució en resulten les diverses vies que els geòmetres podien ésser portats a seguir en aquesta època. Poincaré les ha seguides totes, i veurem com en cada una ha transformat completament l'estat dels nostres coneixements.

1. *Expressió mitjançant funcions conegudes.* Hom podia preguntar-se, ja que unes quantes solucions podien expressar-se mitjançant funcions conegudes, si seria possible conèixer a priori el cas en què això pot reeixir; i, per a pendre el cas més important, aquell en què la integral és algèbrica.

2. *Introducció de noves classes de transcendents.* En el cas (el més ordinari) en què la integral no s'expressa mitjançant les funcions usuals, hom podia cercar d'expressar-la mitjançant noves funcions convenients.

3. *L'estudi local* podia encara rebre nous perfecciona-

ments en ço que pertoca als *punts singulars*. La solució de Cauchy no s'aplicava sinó als casos en què el segon membre de $y'=f(x,y)$ és holomorf entorn del punt (x_0, y_0), per on s'obliga a passar la corba integral. Briot i Bouquet atacaren, com sabem, el cas contrari, i, de primer antuvi, aquell en què per a (x_0, y_0) el segon membre pren la forma $\frac{0}{0}$. La qüestió era saber en quina mesura hom podia perfeccionar llur obra.

4. *Extensió del domini de convergència*. El desenrotllament de Taylor obtingut per Cauchy no és, evidentment, l'única sèrie en què hom pugui pensar. Hom podia preguntar-se si no seria possible tenir altres maneres de desenrotllament convergents, per exemple, per a tota valor real de x; cosa que té grandíssima importància en vista a determinades aplicacions, especialment a la Mecànica.

5. *Estudi des del punt de vista de la teoria de funcions*. Donada la fecunditat meravellosa de què ha donat proves la teoria de funcions analítiques, la investigació directa de les integrals des del punt de vista d'aquesta teoria s'imposava, i ha donat lloc, efectivament, a les recerques clàssiques de Briot i Bouquet i de llurs successors.

Poincaré es situà successivament en cada un d'aquests punts de vista, donà a una multitud de qüestions que s'hi relacionaven un aspecte enterament nou, i, obrint els camins a recerques posteriors, sentava els fonaments dels treballs dels eminents investigadors que s'han ocupat, d'aleshores ençà, d'aquest assumpte.

1. I, primerament, ocupem-nos del problema de la possibilitat d'expressar la integral de

$$R(x, y, y')=0 \qquad \text{per} \qquad \Phi(x, y, c)=0$$

essent Φ algèbrica. Si hom aconseguia determinar el grau d'aquesta funció algèbrica o, almenys un límit superior d'aquest grau, la més gran dificultat seria vençuda. Això és ço que Poincaré ha fet, en sa memòria dels *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, per a casos molt extensos que es defineixen mitjançant els punts singulars; és a dir, si l'equació és de la forma

$$y' = \frac{P}{Q}$$

mitjançant els punts d'indeterminació per als quals

$$P = Q = O.$$

Però la importància pràctica dels casos d'integració algèbrica és tan restringida que ha fet minvar molt, en aquest tema, l'interès dels analistes. Hom pot dir que és l'aspecte més insignificant de la qüestió.

2. La integració mitjançant classes especials de transcendents mai ha fet progrés més capital que amb la grandiosa introducció de les cèlebres funcions fuchsianes (invariants respecte als grups fuchsians de transformacions lineals).

Es d'aquestes noves transcendents que es deriven les funcions tetafuchsianes i zetafuchsianes, amb les quals es poden expressar les integrals de les equacions diferencials lineals amb coeficients algèbrics.

Aquestes funcions fuchsianes intervenen en gran nombre de qüestions les més diverses, i s'han reconegut força potents i valuoses per al desenrotllament de molts dominis de l'Anàlisi i de la teoria de nombres.

Si no insistim més, és perquè no sabríem fer-ho sense dedicar-hi llargues consideracions, penetrant pregonament en la teoria de grups i la teoria de funcions.

De quina manera resol Poincaré la qüestió? Aquí el seu mètode procedeix d'un esguard particularment penetrant, no solament al problema actual, sinó a tot l'Anàlisi, on així es manifesta una unitat profunda i oculta.

Considerem primerament les equacions algèbriques. Preguntem-nos per què, en el fons, una equació de segon grau és de resolució més difícil que una equació de primer grau; una equació de tercer grau i una de quart, més oneroses que la de segon grau; i així successivament.

¿Per què, després, una equació diferencial ordinària ens ofereix més dificultats que una equació algèbrica del mateix grau, i una equació entre derivades parcials encara en presenta més?

Es impossible no relacionar aquest fet amb el d'haver-hi més solucions per trobar. Una equació de primer grau no té sinó una arrel; una equació de segon grau, dues; i *sic de cæteris*. Les equacions diferencials ordinàries depenen d'una constant; les equacions entre derivades parcials depenen d'una funció arbitrària.

Doncs bé: el camí del progrés de l'Anàlisi demostra que és en considerar no una de les solucions, sinó el conjunt de les solucions, que hom pot avançar.

Un tractat antic d'Algebra començarà així l'estudi de una o altra categoria d'equacions: «Sigui x *una arrel* de l'equació donada.»

Un tractat modern (quan es tracta de la resolució algèbrica i no numèrica) començarà així: «Sigui $x_1 \ldots, x_m$ *totes les arrels* de l'equació»; i es consideren les relacions que hi ha entre les arrels, llurs permutacions, etc., i és així com, únicament, després de Rufini, Abel, Galois, s'ha pogut vessar una llum ben clara sobre problemes primerament obscurs.

Doncs precisament d'aquesta manera veiem operar Poincaré en l'exemple precedent; y i y' són considerades no com a funcions de x, sinó com a funcions de y_0, y'_0 (essent y_0, y'_0 les valors inicials, per a $x=0$, per exemple), mentre x conservi una valor constant.

Es en considerar i en comparar les diferents solucions de l'equació (corresponents a les diferents valors de y_0) que hom podrà obtenir la solució.

3. Vinguem, després, a la part en què Poincaré ha generalitzat els resultats de Briot i Bouquet sobre els punts singulars mitjançant un anàlisi al qual dedicà sa tesi doctoral.

Recordem, si us plau, els resultats clàssics de Briot i Bouquet.

Donada l'equació

$$xy' - by = a_1 x + a_2 x^2 + \alpha xy + \beta y^2 + \dots = \varphi(x, y),$$

essent $\varphi(x, y)$ holomorfa entorn de $x=0, y=0$; existeix una integral holomorfa que s'anul·la per a $x=0$, si b no és un nombre enter positiu.

Si $b=1$ i $a_1=0$, hi ha un punt de ramificació a l'origen, amb infinitat de branques d'integrals holomorfes. Si $a_1 \neq 0$, no hi ha integrals holomorfes. El cas en què $b=n>1$, essent b enter positiu, es redueix al precedent.

Si la part real de b és positiva, hi ha una infinitat d'integrals no holomorfes que se'n van vers zero amb x.

Si és negativa i b és real, no hi ha més integral que l'holomorfa que s'anul·la per a $x=0$. Si és negativa i la part imaginària no és nul·la, hi ha una infinitat d'integrals no holomorfes que depenen d'una constant arbitrària i tendeixen vers zero quan es fa seguir a x un camí de manera que $|x^b| \to 0$. (Aquest darrer resultat és degut a Picard i a Painlevé.)

Poincaré s'ha dedicat a l'estudi de la qüestió, és a dir, a l'estudi de les solucions entorn d'un punt singular, considerant el cas més general definit pel sistema

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots\ldots = \frac{dx_m}{X_m} \qquad (1).$$

Hom pot creure, de primer antuvi, que això vindrà a ésser una generalització banal dels resultats de Briot i Bouquet. Els resultats obtinguts demostraran que no hi ha res d'això.

Hom sap que la integració del sistema precedent és equivalent a la resolució de l'equació entre derivades parcials

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_m \frac{\partial f}{\partial x_m} = 0 \qquad (2).$$

Si se'n coneixen $m-1$ integrals diferents i independents, el sistema (1) està resolt.

En abordar l'estudi als voltants de l'origen, sabent que aquest punt és singular, les X seran de la forma

$$X_1 = a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + \ldots + a'_m x_m + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

significant els punts termes d'ordre superior.

Per una transformació lineal convenient, és possible, en general, reduir els termes de primer ordre a la forma $\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots$ de manera que

$$X_1 = \lambda_1 x_1 + \ldots$$
$$X_2 = \lambda_2 x_2 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les λ són arrels d'una equació, fàcil d'establir, anàloga a l'equació en s, ben coneguda.

Poincaré substitueix successivament a la integració de la equació (2) la de cada una de les següents:

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + X_m \frac{\partial f}{\partial x_m} = \lambda_1 f$$

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + X_m \frac{\partial f}{\partial x_m} = \lambda_2 f$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Una comprovació immediata demostra que cada una pot ésser, *almenys formalment,* satisfeta per un desenrotllament de Mac-Laurin, que s'anul·la a l'origen (essent arbitrari el terme de primer grau en x_1 per a la primera; el terme en x_2 per a la segona; etc.) Això donará, certament, una integral de cada una d'aquestes m equacions, holomorfa entorn de $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = o$. Perquè això sigui cert, n'hi ha prou, en ço que pertoca a la primera, per exemple, que, en primer lloc, essent els p, nombres enters positius, tals que

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n \geqq 2,$$

l'equació

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_n p_n = \lambda_1$$

no sigui mai satisfeta. I que, per altra banda, si s'assenyalen els punts λ en llur pla complex, que una certa recta que passi per l'origen deixi tots aquests punts al mateix costat. Es aquesta condició geomètrica que dóna potent interès a la nova qüestió formulada i li dóna un caràcter enterament nou respecte al cas en què $m = 2$.

Si aquestes dues condicions es compleixen, hom pot demostrar, pel mètode de les majorants, la convergència del desenrotllament en sèrie. I amb m integrals semblants $f_1, f_2, \ldots, f_m$ construir les $m-1$ solucions anàlogues a aquesta

$$f=\lambda_2 \log f_1-\lambda_1 \log f_2=\log f_1^{\lambda_2} f_2^{-\lambda_1},$$

que satisfà a

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}+\ldots+X_m \frac{\partial f}{\partial x_m}=0.$$

Aquest és el mètode seguit per Poincaré en sa tesi.

Noteu com tota sa obra està amarada d'intuïció geomètrica, cosa que li permet expressar el resultat en forma tan clara com elegant.

Per altra banda, les propietats del resultat demostren ço que hi havia de pregonament amagat. Considera f com a funció d'un dels paràmetres λ, i comprova que la funció no existeix a l'interior d'un cert polígon; és a dir, que és una funció a *espai llacunar*.

No solament una tal singularitat no s'havia presentat als seus predecessors, però demés apareix amb un caràcter molt diferent del que afecten aquesta classe d'investigacions.

En la teoria de funcions, els geòmetres s'han donat molts mals de cap per a la recerca de funcions irregulars, sense derivada, que omplen una àrea, etc.; però s'han proposat a priori la formació de funcions paradoxals.

Aquesta, al contrari, no es presenta d'una manera estranya i recercada sinó ben natural, com una conseqüència obligada, ineluctable, dels termes d'una qüestió, l'enunciat ben senzill de la qual no la feia preveure de cap manera, i l'alta dificultat de la qual queda així posada en evidència. Els exemples de tal naturalesa abunden en l'obra de Poincaré i en demostren tota la pregonesa (*).

4. Fou en 1881 que Poincaré es lliurà a l'estudi dels desenrotllaments vàlids en tota l'extensió de les valors de la variable. Aquests treballs corresponen als quatre anys fecunds durant els quals pot dir-se que cada dia portava una nova descoberta.

Sigui el sistema

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_m}{X_m}$$

Si hom introdueix una variable auxiliar s per

$$\frac{dx_1}{X_1}=\ldots=\frac{dx_m}{X_m}=\frac{ds}{1+X_1^2+\ldots+X_m^2}$$

hom pot demostrar que, mitjançant condicions molt senzilles imposades a X_1, X_2, ... X_m, les valors de x_1, x_2, ... , x_m són holomorfes en s, en una banda paral·lela a l'eix real.

Si fem la representació conforme de la banda sobre un cercle, cosa que s'obtindrà per una transformació de la forma

$$t=\frac{e^{\alpha s}-1}{e^{\alpha s}+1},$$

hom pot desenrotllar en sèrie les integrals segons les potències de t, car són totes holomorfes respecte a t, en aquest cercle.

(*) Hom sap que l'estudi de les funcions kleineanes introdueix corbes sense tangent, sense radi de curvatura, que intervenen com a elements necessaris en la solució del problema.

Es precisament en aquests estudis que hom troba el germen tan fecund dels treballs posteriors de Sundman, Levi-Civita i Bisconcini sobre la regularització del problema dels tres cossos, del qual haveu sentit parlar aquí mateix, a Levi-Civita. Ells han acconseguit separar les singularitats degudes al xoc, mitjançant transformacions convenients.

Poincaré ha estudiat el problema fins que dos cossos xoquen, i aleshores ha cedit la paraula als il·lustres matemàtics que acabem de citar.

Però el perfeccionament que així han obtingut té també (es pot ben dir) ses arrels en un altre resultat de Poincaré, a saber, la prolongació analítica d'una solució més enllà del domini en què les condicions del problema la defineixen. Un exemple d'aquest fet és, efectivament, format per Poincaré en *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste.*

5. Cal insistir especialment en les propietats de les equacions diferencials en vista a la teoria de funcions: veurem, efectivament, com el mètode seguit per Poincaré es relaciona d'una manera remarcable amb ço que trobarem en una próxima lliçó.

Fuchs havia assenyalat les condicions necessàries i suficients perquè, donada una equació diferencial,

$$f(x,y,y')=0$$

algèbrica en y, y', analítica en x, hom pugui afirmar que la integral no té sinó punts crítics fixos, és a dir, independents de la constant d'integració (*).

(*) Però, per important que fos, el resultat de Fuchs donava l'exemple d'un probleme incompletament resolt: deixava sense resposta la pregunta de si existien certament equacions.

Poincaré ha demostrat que, si el gènere p de la corba

$$f(x, y, y') = 0$$

considerada com a funció de y, y' és zero, hom pot transformar l'equació en una equació de Riccati; si és igual a un, pot integrar-se per quadratures; i si és superior a un, hom aconsegueix la integració per procediments purament algèbrics.

Les condicions de Fuchs no conduïen sinó a casos coneguts o a integracions banals: no introduïen, de cap manera, noves transcendents.

Aquest resultat de Poincaré, purament negatiu en ell mateix, sembla tancar el camí a recerques ulteriors. No hi ha tal cosa: en els mètodes que han servit a Poincaré, hom troba el germen de l'obra considerable de Painlevé, en la qual té gran importància, en primer lloc, l'estudi de les integrals de les equacions de primer ordre que no admeten sinó un nombre finit de branques permutables entorn dels punts crítics mòbils, i, després, sobretot, els estudis de la mateixa naturalesa sobre les equacions de segon ordre que porten a la cèlebre equació

$$y'' = 6y^2 + x$$

i a les equacions anàlogues.